DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

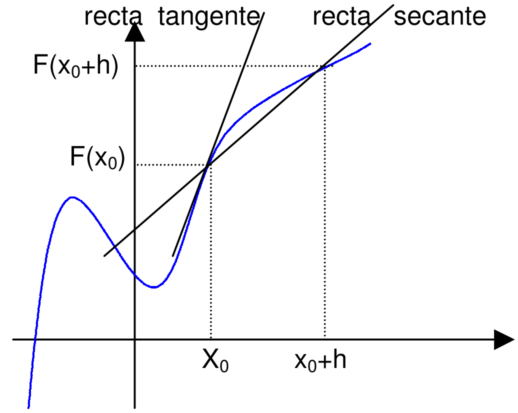
Se estudia aquí uno de los conceptos fundamentales del cálculo diferencial: la derivada de una función. Además de la definición y su interpretación, se hallarán las derivadas de algunas funciones de uso frecuente.

DERIVADA DE UNA FUNCION EN UN NÚMERO

Sea $y = f(x)$ una función y x_0 un número del dominio de la función. Si se toma un valor $x_0 + h$ muy próximo a x_0 (h es un número infinitamente pequeño), a medida que se hace tender h a cero, la recta secante que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ se aproxima a la tangente a la curva en el punto $(x_0, f(x_0))$.

La pendiente de la recta secante es $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Al hacer tender h a cero, la secante tiende a confundirse con la recta tangente a la curva en el punto $(x_0, f(x_0))$. Por lo tanto la pendiente de la tangente a la curva en el punto $(x_0, f(x_0))$. Se define así: $m = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$



Definición de derivada de una función en un punto

Dada una función $y = f(x)$, se llama derivada de la función f en un punto x_0 al límite, si existe y es finito (un número), $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ y se simboliza por

$f'(x_0)$ o por $D(f(x_0))$. Es decir $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) = D(f(x_0))$

Cuando este límite existe se dice que la función f es *derivable* en el punto x_0.

Interpretación geométrica de la derivada

Puesto que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$,

la derivada de la función en un punto x_0 representa la *pendiente de la tangente* a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$.

Ejercicio: cálculo de la derivada de una función en un punto

Calcular la derivada de la función $f(x) = 2x - 3$ en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

Se pide el valor de $f'(1)$ (en este caso, $x_0 = 1$). $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(1+h)-3-(-1)}{h}$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

Calcular la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto 2.

Solución:

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{2+h} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\right)}{h\left(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\right)} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{2+h})^2 - (\sqrt{2})^2}{h\left(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{2+h-2}{h\left(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{2+h} + \sqrt{2}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Ejercicio: cálculo de la ecuación de la tangente a una función en un punto

Calcular la ecuación de la tangente a la curva $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto (4,2).

Solución:

• La tangente pasa por el punto (4, $f(4)$) = (4,2).

• La pendiente de la tangente a la curva en el punto de abscisa 4 es, por definición, $f'(4)$, luego la ecuación de la recta es de la forma $y - 2 = f'(4)\,(x - 4)$. $f'(4)$ se calcula en forma análoga al ejercicio anterior y se obtiene $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

La ecuación de la tangente es entonces $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \Rightarrow y - 2 = \frac{1}{4}x - 1 \Rightarrow$ $x - 4y + 4 = 0$.

Ejercicio: estudio de la derivabilidad de una función en un número

Estudiar la derivabilidad de la función *f(x)* definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \le 1 \\ x & si\ x > 1 \end{cases}$ en $x_1=1$ y $x_2=0$

Solución:

a) Derivabilidad en $x_1 = 1$.

Se deben considerar dos casos

Si $h > 0$, $1 + h > 1$ y en este caso $f(1+h) = 1+h$. Por tanto: $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1+h-1}{h} = 1$

Este es el «límite por la derecha»

Si $h<0$, $1+h<1$ y por lo tanto $f(1+h) = (1+h)^2$. Luego:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} (2+h) = 2$$

Este es el «límite por la izquierda»

Al no coincidir los límites a derecha e izquierda de 0, no existe tal límite y, por tanto, la función *f* no es derivable en $x = 1$. (no existe recta tangente en el punto (1,1) del gráfico de la función) *b)* Derivabilidad en $x_2 = 0$.

En este caso no es necesario considerar $h > 0$ y $h < 0$ ya que en las proximidades de cero (h es muy pequeño) la función es $f(x) = x^2$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$$

El límite existe y es cero, luego $f(x)$ es derivable en $x_2 = 0$ y la pendiente de la tangente es cero (paralela al eje de abscisas).

Estudiar la derivabilidad de la función $f(x) = |x|$ (valor absoluto de x) definida por

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \text{ en el punto } x_0 = 0.$$

Solución:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \qquad \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Al no coincidir los límites a derecha e izquierda de 0, la función $f(x) = |x|$ no es derivable en dicho punto.

¿Cuándo hay que considerar límites a derecha e izquierda al calcular la derivada de una función en un punto?

Si al dibujar la curva se observa que en el punto considerado ésta cambia bruscamente de dirección, es necesario considerar límites a derecha e izquierda, puesto que, en este caso, la tangente no se comporta de igual modo y se «quiebra».

Consecuencias de la definición de derivada en un punto

1. Si existe la derivada de una función $f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$, existen las derivadas a derecha e izquierda de x_0 y tienen que ser iguales; de lo contrario no existiría $f'(x_0)$.

2. Puede ocurrir, no obstante, que existiendo las derivadas a derecha e izquierda éstas sean distintas. En este caso no existe la tangente en $(x_0, f(x_0))$. Los puntos en los que ocurre esto se llaman puntos angulosos.

3. Los puntos *A, B, C, D* y *E* de la gráfica de la ilustración son puntos angulosos: la curva cambia bruscamente de dirección en ellos. La función correspondiente no es derivable en las abscisas de dichos puntos.

4. No es difícil, consecuentemente, imaginar la gráfica de una función que no sea derivable en muchos e, incluso, infinitos puntos.

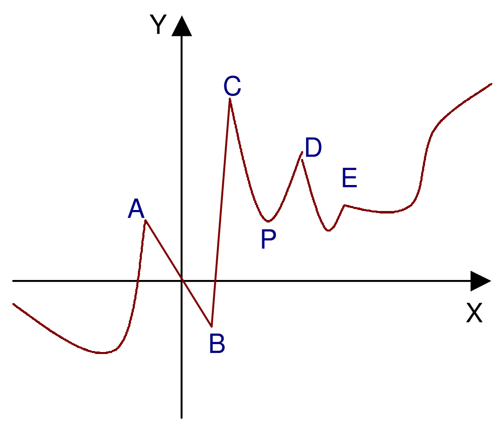


FIGURA 1

5. La idea que hasta ahora se tenía de tangente a una curva como la recta que posee un único

punto común con ella no es nada apropiada. Si esto fuese así la curva de la fig. 1 no tendría tangente en el punto *P*, mientras que la curva de la fig. 1 contaría con infinitas tangentes en C

6. Si una función f es continua en x_0 y ocurre que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \infty$ entonces la curva y=f(x) tiene una tangente vertical en el punto $(x_0, f(x_0))$. En este caso f no es derivable en x_0.

<u>Tangente a una curva en un punto</u>

El concepto de derivada facilita la definición de *tangente* a una curva en un punto como el límite de una secante que pasa por él y por otro punto cualquiera de la curva cuando éste último, recorriendo la curva, tiende a coincidir con el primero.

<u>Propiedad</u>

Si una función es derivable en un punto, necesariamente es continua en él.

Demostración:

Sea una función *y = f(x)* derivable en x_0. Para probar que la función es continua en él, es preciso demostrar que $\lim\limits_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, o lo que es equivalente, que $\lim\limits_{h \to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0$

Pero $f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot h$. Tomando límites cuando h tiende a 0,

$\lim\limits_{h \to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \cdot \lim\limits_{h \to 0} h$, de donde, por ser *f(x)* derivable,

$\lim\limits_{h \to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$, resultado al que se quería llegar.

Esta propiedad evita el trabajo de estudiar la derivabilidad de una función en un punto donde ésta no sea continua.

Por el contrario, puede darse el caso de una función continua en todos los puntos y no ser derivable en alguno, e incluso infinitos puntos. Vea como ejemplo la función y=|*x*|, que siendo continua en todos los números reales, no es derivable en cero, como ya se ha comprobado.

CÁLCULO DE DERIVADAS (I)

<u>Derivada de una función constante</u>

Sea una función constante *f(x) = C*.

Su gráfica es, como se sabe, una recta paralela al eje de abscisas. Puesto que para cualquier valor de la abscisa su ordenada correspondiente es, constantemente, igual a *C*, si *a* es un punto cualquiera del dominio de definición de *f(x)*, *f(a + h) - f(a) = C - C =* 0, por lo que.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Luego la derivada de una constante es siempre cero. Si $f(x) = C \Rightarrow f'(x) = 0$

<u>Derivada de la función lineal</u>

Sea una función lineal cualquiera *f(x) = mx + b*. Para un punto cualquiera *x*,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{m(x+h)+b-(mx+b)}{h} = \frac{m\,h}{h} = m, \text{ y } \qquad \lim_{h\to 0} m = m = f'(x),$$

lo cual significa que la derivada de una recta coincide con la pendiente de ella misma y, en consecuencia, la tangente en un punto a una recta es la propia recta. Si $f(x) = mx + b \Rightarrow f'(x) = m$

Derivada de una constante por una función

Si k es una constante y *f(x)* una función, la derivada de la nueva función *k f(x)* será:

$$\lim_{h\to 0} \frac{k\cdot f(x+h)-k\cdot f(x)}{h} = \quad \lim_{h\to 0} \frac{k\left(f(x+h)-f(x)\right)}{h} = k.f'(x)$$

Se ha demostrado que $(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$

Así, para derivar una expresión de la forma $k \cdot f(x)$, basta derivar la función *f(x)* y multiplicar después por la constante *k.*

Derivada de la función potencia x^m (m es un número natural)

Para calcular la derivada de la función $f(x) = x^m$, $m > 0$, hay que evaluar el cociente

$\frac{(x+h)^m - x^m}{h}$. Desarrollando por el binomio de Newton $(x+h)^m$,

$$\frac{(x+h)^m - x^m}{h} = \frac{\binom{m}{0} x^m + \binom{m}{1} x^{m-1}\cdot h + \binom{m}{2} x^{m-2}\, h^2 + \ldots + \binom{m}{m} h^m - x^m}{h} =$$

$$= \frac{\cancel{x^m} + \binom{m}{1} x^{m-1}\, h + \ldots + \binom{m}{m} h^m - \cancel{x^m}}{h} = \binom{m}{1} x^{m-1} + \binom{m}{2} x^{m-2}\, h + \ldots + \binom{m}{m} h^{m-1}$$

Tomando límites cuando $h \to 0$,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^m - x^m}{h} = \lim_{h\to 0} \left[\binom{m}{1} x^{m-1} + \binom{m}{2} x^{m-2}\, h + \ldots + \binom{m}{m} h^{m-1}\right]$$

Salvo el término $\binom{m}{1} x^{m-1} = m\,x^{m-1}$, que no depende de h, el resto de los sumandos tiende a cero (su límite es cero). Se concluye que Si $f(x) = x^m \Rightarrow f'(x) = m\,x^{m-1}$

Ejercicio: cálculo de derivadas

Calcular la derivada de $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa - 1.

Solución:

$f'(x) = 2 \cdot x^{2-1} = 2\,x$ $\qquad$ $f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2$

Entonces, la pendiente de la tangente a la parábola $y = x^2$ en $x = -1$ es - 2.

Derivadas de las funciones trigonométricas *sen x* y *cos x*

La derivada de la función $f(x) = sen\ x$ es $f'(x) = cos\ x$. *Veamos la demostración*

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{sen(x+h)-senx}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{senx.\cosh+senh.\cos x-senx}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-senx(1-\cosh)+senh.\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[-senx.\frac{1-\cosh}{h}+\frac{senh}{h}.\cos x\right]=-senx.0+1.\cos x=\cos x$$ *se han usado dos límites conocidos*

La derivada de la función *g(x) = cos x* es *g'(x) = - sen x. La demostración es análoga a la anterior y se le deja al lector como ejercicio.*

Derivada de la función logaritmo natural

Puesto que el logaritmo está definido sólo para valores positivos, es necesario considerar el logaritmo de *x* donde x>0

Si *x* es positivo, aun tomando *h* negativo, *x + h* es positivo si se toman valores de *h* suficientemente pequeños, lo cual es posible pues se va a calcular el límite cuando *h* tiende a cero. En estas condiciones

$$\frac{ln(x+h)-ln\,x}{h} = \frac{1}{h}\cdot ln\frac{x+h}{x} = ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

Por tanto, si *x* > 0

$$[ln(x)]' = \lim_{h\to 0} ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = ln\left[\lim_{h\to 0}\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] = ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right] = ln\lim_{h\to 0}\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}} = ln\,e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

Como se aprecia en la demostración, se llega a la conclusión Si $f(x) = ln\,x \to f'(x) = \frac{1}{x}$

Derivadas de las funciones exponenciales

Sea la función $y = a^x$, siendo *a* una constante positiva distinta de 1. La derivada de esta función en un punto *x* es:

$$y' = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x\cdot a^h-a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h} = a^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = a^x\,ln\,a$$

En particular, cuando la constante *a* es el número *e*, la derivada de la función $g(x)=e^x$ es

$g'(x)=(e^x)' = e^x \cdot ln\,e = e^x \cdot 1 = e^x$ Si $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x\cdot ln\,a$ y Si $g(x)=e^x \Rightarrow g'(x)=e^x$

Hasta el momento se saben derivar algunas funciones elementales pero no hay nada que permita encontrar las derivadas de una suma, un producto o un cociente de estas derivadas; se requiere, por consiguiente, seguir avanzando en la obtención de propiedades encaminadas a este fin.

Reglas de derivación

Hay que recordar cómo se definen la suma, el producto y el cociente de funciones. Si *f* y *g* son dos funciones definidas en un mismo intervalo (en caso contrario, alguna de estas operaciones podría no estar definida), *Si f y g son dos funciones reales definidas en un intervalo I, y son derivables en todo $x\in I$* entonces:

a) La función suma de *f* y *g* . $f + g: I \longrightarrow \mathbf{R}$, es derivable y se cumple $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

b) La función diferencia. $f - g: I \longrightarrow \mathbf{R}$, es derivable y se cumple $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

c) La función producto . $f \cdot g: I \longrightarrow \mathbf{R}$, es derivable y se cumple $(f.g)'(x)=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$

d) La función cociente. $\dfrac{f}{g} : I \to \mathbf{R}$ *es derivable y* $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$

siempre que $g(x) \neq 0$.

<u>Demostraciones y ejemplos:</u>

Si *f* y *g* son dos funciones derivables en un mismo punto *x* de un intervalo, la derivada de la función suma en dicho punto se obtiene aplicando la definiciones de derivada y suma de funciones, además de las propiedades de límites:

$$(f+g)'(x)= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} = \text{(descomponiendo en suma de dos límites)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$$

La derivada de una suma es igual a la suma de las derivadas. $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

<u>Derivada de una diferencia de funciones</u>

$f - g = f + (-g)$, por lo que $[f(x) - g(x)]' = [f(x) + (-g(x))]' = f'(x) + (-g(x))' = f'(x) - g'(x)$

En consecuencia $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$

Ejemplos: cálculo de derivadas

Calcular la derivada de la función $f(x) = x - \cos x$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} (x)' = 1 \\ (\cos x)' = -\operatorname{sen} x \end{array}\right\} \to f'(x) = 1 - (-\operatorname{sen} x) = 1 + \operatorname{sen} x$$

Calcular la derivada de $f(x) = x^3 - \operatorname{sen} x + \ln x$ en el punto $x = \pi/3$.

Solución:

$f'(x)=3x^2-(-\cos x)+ 1/x$ sustituyendo x por $\pi/3$ se obtiene $f'(\pi/3)=3.(\pi/3)^2+\cos(\pi/3)+3/\pi$

<u>Derivada de un producto de funciones</u>

Sean *f* y *g* dos funciones definidas y derivables en un mismo punto *x*.

$$\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h} = \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} = \qquad (1)$$

Si se suma y se resta en el numerador $f(x) \cdot g(x+h)$, la fracción anterior (1) no varía,

(2)

$$(1) = \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x+h) + f(x)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} = (2)$$

Sacando *g(x + h)* factor común en los dos primeros sumandos, y *f(x)* en los otros dos,

$$(2) = \frac{g(x+h)\left[f(x+h) - f(x)\right] + f(x)\left[g(x+h) - g(x)\right]}{h} \quad - \quad g(x+h)\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Si ahora se toman límites cuando *h* tiende a cero,

$\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$, pues g es continua en x ya que es derivable en x.

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ por definición de derivada.

$\lim\limits_{h\to 0} f(x) = f(x)$, al no depender $f(x)$ de h.

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$ por definición.

Por tanto, $(f\cdot g)'\ (x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(f\cdot g)\ (x+h) - (f\cdot g)\ (x)}{h} = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

$$\boxed{(f\cdot g)'\ (x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)}$$

Ejercicio: cálculo de derivadas

Hallar la derivada de *h(x) = x · ln x* para cualquier *x* positivo.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si se llama } f(x) = x,\ f'(x) = 1 \\ \text{Si } g(x) = \ln x,\ g'(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}\right\} \to \left[f(x)\cdot g(x)\right]' = 1\cdot \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

② Calcular la derivada de $h(x) = \dfrac{1}{2}x^2\ sen\ x$.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } f(x) = x^2,\ f'(x) = 2x \\ \text{Si } g(x) = sen\ x,\ g'(x) = cos\ x \end{array}\right\} h'(x) = \frac{1}{2}(2x\cdot sen\ x + x^2 cos\ x)$$

CÁLCULO DE DERIVADAS (II)

Derivada de un cociente de funciones

Considérense, como en los casos precedentes, dos funciones *f* y *g* definidas y derivables en un punto *x*. Además, en este caso, se tiene que imponer la condición de que la función *g* no se anule en *x*.

$$\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} = \frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{g(x)\cdot g(x+h)\cdot h} = \frac{1}{g(x)\cdot g(x+h)}\cdot\frac{f(x+h)\ g(x) - f(x)\ g(x+h)}{h} \qquad (1)$$

Si en la segunda fracción se suma y se resta al numerador *f(x) · g(x)*, se obtiene:

$$(1) = \frac{1}{g(x)\cdot g(x+h)}\cdot\frac{f(x+h)\ g(x) - f(x)\ g(x) + f(x)\ g(x) - f(x)\ g(x+h)}{h} \qquad (2)$$

Sacando factor común *g(x)* en los dos primeros sumandos de la segunda fracción, y *f(x)* en los dos últimos,

$$(2) = \frac{1}{g(x)\cdot g(x+h)}\cdot\frac{g(x)\left[f(x+h)-f(x)\right]-f(x)\left[g(x+h)-g(x)\right]}{h}$$

Por último, se toman límites cuando *h* tiende a cero notando que:

$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$ por la continuidad de g en x al ser g derivable en dicho punto.

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$ y $\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$ por definición de derivada.

En definitiva,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{g(x)\cdot g(x+h)}\right)\cdot g(x)\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] - f(x)\left[\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] =$$

$$= \frac{1}{\left[g(x)\right]^2}\left[g(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot g'(x)\right]$$

$$\boxed{\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}}$$

Ejercicio: cálculo de derivadas

① Calcular la derivada de $y = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ (m es un número natural).

Solución:

$$y' = \frac{0\cdot x^m - 1\cdot m\cdot x^{m-1}}{(x^m)^2} = -m\cdot\frac{x^{m-1}}{x^{2m}} = -m\cdot x^{m-1-2m} = -m\cdot x^{-m-1}$$

<u>**Derivada de la función *tg x***</u>

Puesto que $tg\, x = \frac{sen\, x}{cos\, x}$, Si *f(x) = sen x, f'(x) = cos x* y si *g(x) = cos x, g'(x) = - sen x*

Aplicando la fórmula de la derivada de un cociente,

$$(tg\, x)' = \frac{cos\, x\cdot cos\, x - sen\, x\cdot(-sen\, x)}{cos^2 x} = \frac{cos^2 x + sen^2 x}{cos^2 x} = \frac{cos^2 x}{cos^2 x}+\frac{sen^2 x}{cos^2 x} = 1+tg^2 x$$

O bien, recordando que $sen^2 x + cos^2 x = 1$, $\frac{cos^2 x + sen^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x} = sec^2 x$

Por tanto, $\boxed{(tg\, x)' = 1+tg^2 x = sec^2 x = \frac{1}{cos^2 x}}$

<u>**Derivada de la función *sec x***</u>

$sec\, x = \frac{1}{cos\, x}$ Si *f(x) =* 1, *f'(x) =* 0 y si *g(x) = cos x, g'(x) = - sen x* , luego

Por la fórmula de la derivada de un cociente,

$$(sec\ x)' = \frac{0 \cdot cos\ x - 1 \cdot (-\ sen\ x)}{cos^2 x} = \frac{sen\ x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos\ x} \cdot \frac{sen\ x}{cos\ x} = sec\ x \cdot tg\ x$$

$$\boxed{(sec\ x)' = sec\ x \cdot tg\ x}$$

Derivada de la función *cosec x*

$cosec\ x = \frac{1}{sen\ x}$ Si $f(x) = 1$, $f'(x) = 0$ y Si $g(x) = sen\ x$, $g'(x) = cos\ x$. Por la derivada de un cociente, $(cosec\ x)' = \frac{0 \cdot sen\ x - 1 \cdot cos\ x}{sen^2 x} = \frac{-\ cos\ x}{sen^2 x} = \frac{1}{sen\ x} \cdot \frac{-\ cos\ x}{sen\ x} =$ -cosec x.cotg x

$$\boxed{(cosec\ x)' = -\ cosec\ x \cdot cotg\ x}$$

Derivada de la función *cotg x*

$$cotg\ x = \frac{1}{tg\ x} = \frac{cos\ x}{sen\ x}$$

Si $f(x) = cos\ x$, $f'(x) = -\ sen\ x$

Si $g(x) = sen\ x$, $g'(x) = cos\ x$

$$(cotg\ x)' = \frac{(-\ sen\ x) \cdot sen\ x - cos\ x \cdot cos\ x}{sen^2 x} = \frac{-\ sen^2 x - cos^2 x}{sen^2 x}$$

$$= -\frac{sen^2 x}{sen^2 x} - \frac{cos^2 x}{sen^2 x} = -1 - cotg^2 x$$

O haciendo uso de $sen^2 x + cos^2 x = 1$, $\frac{-\ sen^2 x - cos^2 x}{sen^2 x} = \frac{-1}{sen^2 x} = -cosec^2 x$

Por tanto,

$$\boxed{(cotg\ x)' = -(1 + cotg^2 x) = -cosec^2 x = \frac{-1}{sen^2 x}}$$

Ejercicio: cálculo de derivadas

① Calcular la derivada de $h(x) = \frac{x\ cos\ x - 2}{x^2}$

Solución:

Llamando $f(x) = x\ cos\ x - 2$, $f'(x) = 1 \cdot cos\ x + x \cdot (-\ sen\ x) = cos\ x - x\ sen\ x$ (la derivada de 2 es cero por ser una constante)

Si $g(x) = x^2$, $g'(x) = 2\ x$

• $h'(x) = \frac{(cos\ x - x\ sen\ x)\ x^2 - (x\ cos\ x - 2) \cdot 2\ x}{x^4} = \frac{-x\ cos\ x - x^2\ sen\ x + 4}{x^3}$

② Hallar la derivada de $h(x) = \frac{x\ tg\ x - cos\ x}{ln\ x}$

Solución:

• Si $f(x) = x\ tg\ x - cos\ x$, $f'(x) = 1 \cdot tg\ x + x(1 + tg^2 x) - (-\ sen\ x) = tg\ x + x(1 + tg^2 x) + sen\ x$

• Si $g(x) = \ln x$, $g'(x) = \dfrac{1}{x}$ entonces $h'(x) = \dfrac{(tg\, x + x + x\, tg^2 x + sen\, x)\ \ln x - (x\, tg\, x - \cos x)\cdot 1/x}{(\ln x)^2}$

A pesar de contar ya con un número estimable de propiedades para el cálculo de derivadas, hay funciones elementales, como $\sqrt{x}$, para las que no se conoce ningún procedimiento para la obtención de su derivada. Para seguir avanzando por este camino se hace imprescindible conocer una de las propiedades más fundamentales y útiles de la derivación, aunque no se hará su demostración. Se la conoce como derivada de una función compuesta o regla de la cadena.

REGLA DE LA CADENA

Esta propiedad asegura que si $y = f(x)$ es una función derivable en un cierto intervalo I, $f: I \longrightarrow \mathbf{R}$,
Y $z = g(y)$ es otra función derivable y definida en otro intervalo J que contiene a todos los valores (imágenes) de la función *f*, es decir que $g: J \to \mathbf{R}$ y $f(x) \in J$ para toda $x \in I$

entonces la función compuesta $g_o f : I \to \mathbf{R}$ definida por $(g_o f)(x) = g[f(x)]$, es derivable en todo punto *x* del intervalo *I* y se cumple que

$$\boxed{(g \circ f)'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x)}$$

Ejemplo: cálculo de derivadas

Calcular la derivada de la función $h(x) = sen\, x^2$.

Solución:

La función $sen\, x^2$ es una función compuesta de otras dos $f(x) = x^2$ y $g(x) = sen\, x$.

$\mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathbf{R} \xrightarrow{g} \mathbf{R}$

$x \longrightarrow x^2 \longrightarrow sen\, x^2$ En efecto, $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^2) = sen\, x^2$

Al ser $g(x) = sen\, x$, $g'(x) = \cos x$, por tanto $g'[f(x)] = \cos f(x) = \cos x^2$ y $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

Por la regla de la cadena, $h'(x) = g'[f(x)] \cdot f'(x) = 2x \cos x^2$

② Derivar la función $h(x) = \left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^3$

Solución:

• $h(x)$ es una función compuesta de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ y $g(x) = x^3$

(Se ha de suponer que $x \neq 0$ porque para este valor la función no está definida.)

$\mathbf{R} - \{0\} \xrightarrow{f} \mathbf{R} \xrightarrow{g} \mathbf{R}$

$x \longrightarrow \dfrac{x^2+1}{x} \longrightarrow \left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^3$ $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right) = \left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^3$

De $g(x) = x^3$, se deduce $g'(x) = 3x^2$. En consecuencia, $g'[f(x)] = 3\, f(x)^2 = 3\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^2$

• Por otro lado, $f'(x) = \dfrac{2x \cdot x - (x^2+1)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2}$

Por la regla de la cadena,

$$\left[\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^3\right]' = 3\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right),$$

<u>Regla de la cadena para la función potencial</u>

Se sabe que la derivada de una función $f(x) = x^m$ es $f'(x) = m \cdot x^{m-1}$.

Si en lugar de x se tuviese una función $u(x)$, la derivada de $u(x)^m$

$$x \longrightarrow u(x) \longrightarrow u(x)^m$$

aplicando la regla de la cadena, será:

$[u(x)^m]' = m \cdot u(x)^{m-1} \cdot u'(x)$

Para simplificar la notación, y a partir de ahora, se escribirá simplemente u en lugar de $u(x)$.

Así,

$$\boxed{\text{Si } f(x) = u^m \Rightarrow f'(x) = (u^m)' = m \cdot u^{m-1} \cdot u'}$$

Ejercicio: cálculo de derivadas

Calcular la derivada de $f(x) = (x^2 + 1)^3$.

Solución:

• Si $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$

En este caso $m = 3$

• $f'(x) = 3\,(x^2+1)^2 \cdot 2x = 6x\,(x^2+1)^2$

<u>Regla de la cadena para la función logaritmo natural</u>

Si en la derivada de logaritmo neperiano se sustituye x por una función de x, $u(x)$, en virtud de la regla de la cadena se tiene que

$$(\ln|u|)' = \frac{u'}{u}$$

Ejercicio: cálculo de derivadas

① Calcular la derivada de $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)$

Solución:

• Se toma $u = \dfrac{x^2+1}{x^2}$ y se calcula u' aplicando la derivada de un cociente:

$$u' = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2+1)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

Se aplica la regla de la cadena:

$$f'(x) = \left(ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)\right)' = -\frac{2}{x^3} : \frac{x^2+1}{x^2} = -\frac{2x^2}{x^3(x^2+1)} = \frac{-2}{x(x^2+1)}$$

Hallar la derivada de $f(x) = ln\,|sen\ x\,|$

Solución:

$u = sen\ x$; $u' = cos\ x$ • $f'(x) = (ln\,|sen\ x|)' = \frac{u'}{u} = \frac{cos\ x}{sen\ x} = cotg\ x$

<u>Regla de la cadena para las funciones exponenciales</u>

Si u es una función derivable, por la regla de la cadena se tiene que las función $f(x) = a^u$ y $g(x) = e^u$ son derivables, además , $f'(x) = (a^u)' = u' \cdot a^u \cdot ln\ a$ y $g'(x) = (e^u)' = u' \cdot e^u$

Ejercicio: cálculo de derivadas

(1) Calcular la derivada de $f(x) = 4^{x\ sen\ x}$

Solución:

• Llamando $u = x \cdot sen\ x$, $u' = 1 \cdot sen\ x + x\ cos\ x$

$f'(x) = (4^{x\ sen\ x})' = (sen\ x + x\ cos\ x) \cdot 4^{x\ sen\ x} \cdot ln\ 4$

② Calcular la derivada de $g(x) = e^{-x^2}$

Solución:

• Si $u = -x^2$, $u' = -2x$; $g'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' = -2x \cdot e^{-x^2}$

<u>Regla de la cadena para las funciones trigonométricas</u>

$(sen\ u)' = u' \cdot cos\ u$ $(cos\ u)' = -u' \cdot sen\ u$ $(tg\ u)' = (1 + tg^2\ u) \cdot u' = \frac{u'}{cos^2 u} = u' \cdot sec^2\ u$

$(sec\ u)' = u' \cdot sec\ u \cdot tg\ u$ $(cosec\ u)' = -u' \cdot cosec\ u \cdot cotg\ u$ $(cotg\ u)' = -u'(1 + cotg^2 u) = \frac{-u'}{sen^2\ u}$

Ejercicio: cálcular la derivada

Calcular la derivada de $f(x) = sen(sen\ x)$

Solución:

Si $u = sen\ x$, $u' = cos\ x$ $f'(x) = (sen(sen\ x))' = u' \cdot cos\ u = cos\ x \cdot cos(sen\ x)$

Hallar la derivada de $g(x) = sec\ (x^2 - 1)$

Solución:

$u = x^2 - 1$; $u' = 2x$ $g'(x) = (sec(x^2 - 1))' = u' \cdot sec\ u \cdot tg\ u = 2x \cdot sec(x^2 - 1) \cdot tg(x^2 - 1)$

Calcular la derivada de $h(x) = sen^3 x^2$

Solución:

• Llamando $u = sen\ x^2$, hay que derivar $sen^3 x^2 = u^3$.

• Por la regla de la cadena, la derivada de u^3 es $(u^3)' = 3 \cdot u^2 \cdot u'$

Llamando $v = x^2$; $u = sen\ v$. $u' = v' \cdot \cos v = 2x \cdot \cos x^2$

• Finalmente, $h'(x) = (sen^3 x^2)' = 3u^2 \cdot u' = 3 \cdot sen^2 x^2 \cdot 2x \cdot \cos x^2 = 6x \cdot sen^2 x^2 \cdot \cos x^2$

Para calcular la derivada de una función que es inversa de otra, es necesario conocer un importante resultado, aunque se evita hacer su demostración.

Derivada de la función inversa

Si una función $y = f(x)$ admite una función inversa f^{-1} y la función $f(x)$ es derivable en un punto x_0, entonces la función f^{-1} es derivable en el punto $f(x_0)$.

Sabemos que al componer una función con su inversa se obtiene la identidad, la cual es derivable. Así tenemos que $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ y derivando ambos miembros se obtiene

$[(f^{-1} \circ f)(x)]' = 1 \Rightarrow f^{-1\,'}(f(x)).f'(x) = 1 \Rightarrow f^{-1\,'}(f(x)) = 1/f'(x)$

En virtud de este resultado, la función $x^{1/n}$ es derivable por ser la función inversa de x^n:

$$x \longrightarrow x^n \longrightarrow (x^n)^{1/n} = x$$

Como consecuencia, al ser la función x^m derivable para cualquier número entero m, como ya se ha visto, la función $x^{m/n}$ es derivable por ser composición de dos funciones derivables:

$$x \longrightarrow x^m \longrightarrow x^{m/n}$$

Derivada de la función $x^{1/n}$

Sea $u = x^{1/n}$; elevando a n, $u^n = x$.

Derivando ambos miembros se observa que

$$\left.\begin{array}{l} (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u' \\ x' = 1 \end{array}\right\} nu^{n-1} \cdot u' = 1. \qquad \text{Despejando } u', \qquad u' = \frac{1}{n \cdot u^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot x^{\frac{n-1}{n}}}$$

En particular, la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$ es $(x^{1/2})' = \dfrac{1}{2 \cdot x^{1/2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Derivada de la función $x^{m/n}$

Sea $f(x) = x^{m/n}$

Se eleva a n, $f(x)^n = x^m$

Luego se deriva: $n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x) = m \cdot x^{m-1}$

Pero $f(x)^{n-1} = (x^{m/n})^{n-1}$

Despejando $f'(x)$, $f'(x) = \dfrac{mx^{m-1}}{n(x^{m/n})^{n-1}} = \dfrac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}$

Regla de la cadena para las funciones $u^{1/n}$ y $u^{m/n}$

Si en las dos funciones anteriores se tiene una función dependiente de la variable x, $u(x)$, en lugar de la función x, se obtienen las siguientes derivadas:

Si $f(x) = u^{1/n} \Rightarrow f'(x) = (u^{1/n})' = \dfrac{u'}{n \cdot u^{\frac{n-1}{n}}}$ En particular, $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Si $g(x) = u^{m/n} \Rightarrow g'(x) = (u^{m/n})' = \dfrac{m}{n} \cdot u^{\frac{m}{n}-1} \cdot u'$

Para obtener estas igualdades, basta aplicar la regla de la cadena.

Ejercicio: cálculo de derivadas

① ¿Cuál es la función derivada de $f(x) = \sqrt{x^2 + sen\ x}$

Solución:

• Se escribe la raíz en forma de potencia: $\sqrt{x^2 + sen\ x} = (x^2 + sen\ x)^{1/2}$

• Se trata de calcular una derivada de la forma $u^{1/2}$.

Si $u = x^2 + sen\ x$, $u' = 2x + cos\ x$

• Obsérvese que en este caso $n = 2$ $f'(x) = \left[\sqrt{x^2 + sen\ x}\right]' = (\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}} = \dfrac{2x + cos\ x}{2\sqrt{x^2 + sen\ x}}$

② Calcular la derivada de $f(x) = \sqrt[3]{\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2}$

Solución:

• Se escribe la raíz en forma de potencia: $\sqrt[3]{\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2} = \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{2/3}$

• $u = \dfrac{x+1}{x}$; $u' = \dfrac{1 \cdot x - (x+1) \cdot 1}{x^2} = \dfrac{x - x - 1}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$

• Se aplica la fórmula $\left(u^{\frac{m}{n}}\right)' = \dfrac{m}{n} \cdot u^{\frac{m}{n}-1} \cdot u'$

$$f'(x) = \left[\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}\right]' = \frac{2}{3}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{2}{3}-1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{3x^2}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{-1}{3}} = -\frac{2}{3x^2}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3x^2}\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}$$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS

La función $sen\ x$ definida en $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ toma todos los valores del intervalo $[-1, 1]$ una sola vez, es decir, dos números distintos de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ alcanzan valores distintos en [- 1, 1].

Esto quiere decir que existe una aplicación biyectiva de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ a $[-1, 1]$ mediante la función *seno*. En estas condiciones se puede definir la aplicación inversa de $f(x) = sen\ x$, llamada «arco-seno» y que se simboliza por *arc sen x*.

Así, $arc\ sen\ \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ pues $sen\ \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$arc\ sen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$ pues $sen\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -sen\ \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow[sen\ x]{f} [-1, 1] \xrightarrow[arc\ sen\ x]{f^{-1}} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x \longrightarrow f(x) = sen\ x \longrightarrow f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(sen\ x) = arc\ sen\ (sen\ x) = x$$

Derivada de la función *arc sen x*

Si $y = arc\ sen\ x = f^{-1}(x)$, aplicando f, $f(y) = f(f^{-1}(x)) = x$, es decir, $sen\ y = x$.

Derivando respecto a x, por la regla de la cadena, $y' \cdot cos\ y = 1$ ó $y' = \frac{1}{cos\ y}$

De la conocida fórmula $sen^2 y + cos^2 y = 1$, $cos^2 y = 1 - sen^2 y \rightarrow cos\ y = \pm\sqrt{1 - sen^2 y}$;

pero en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ Cos y es positivo, por lo que $cos\ y = \sqrt{1 - sen^2 y}$.

Por último, y puesto que $sen\ y = x$, $cos\ y = \sqrt{1 - x^2}$

Llevando este resultado a la expresión de y', $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ Si $h(x) = arc\ sen\ x \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Derivada de la función *arc cos x*

Análogamente, la función *cos x* tiene una función inversa llamada «arco-coseno» y se simboliza por *arc cos x.*

De $y = arc\ cos\ x$ se deduce $x = cos\ y$. Derivando por la regla de la cadena,

$1 = -y' \cdot sen\ y \rightarrow y' = \frac{-1}{sen\ y}$

Como $sen\ y = \sqrt{1 - cos^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, $y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Si $h(x) = arc\ cos\ x \Rightarrow h'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Derivada de la función *arc tg x*

La inversa de la función *tg x* se llama «arco-tangente» y se simboliza por *arc tg x*.

$y = arc\ tg\ x$, $x = tg\ y$. Derivando por la regla de la cadena,

$1 = y'(1 + tg^2 y) = y'(1 + x^2)$. Despejando y', $y' = \dfrac{1}{1 + x^2}$ Si $h(x) = arc\ tg\ x \Rightarrow h'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

Derivada de la función *arc cotg x*

La inversa de la función *cotg x* se llama «arco-cotangente» y se simboliza por *arc cotg x*.

Si *y = arc cotg x*, *x = cotg y*. Derivando esta igualdad por la regla de la cadena,

$1 = -y' \cdot (1 + cotg^2 y) = -y' \cdot (1 + x^2)$. Despejando y', $y' = \dfrac{-1}{1 + x^2}$ Si $h(x) = arc\ cotg\ x \Rightarrow h'(x) = \dfrac{-1}{1 + x^2}$

Derivada de la función *arc sec x*

Análogamente a los casos anteriores, *sec x* tiene una función inversa llamada «arco secante» y simbolizada por *arc sec x.*

y *= arc sec x,* *x = sec y.* Derivando por la regla de la cadena,

$1 = y' \cdot sec\ y \cdot tg\ y = y' \cdot x \cdot tg\ y$ (1)

Por trigonometría se sabe que $1 + tg^2 y = \dfrac{1}{cos^2 y} = sec^2 y = x^2$, de donde $tg^2 y = x^2 - 1 \rightarrow tg\ y = \sqrt{x^2 - 1}$

Sustituyendo este valor en la igualdad (1), $1 = y' \cdot x\sqrt{x^2 - 1}$, y despejando y',

$y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ Si $h(x) = arc\ sec\ x \Rightarrow h'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

Derivada de la función *arc cosec x*

Siguiendo los mismos pasos que en el caso anterior,

y = arc cosec x, *x = cosec y*

Derivando: $1 = -y' \cdot cosec\ y \cdot cotg\ y = -y' \cdot x \cdot cotg\ y$ (1)

Como $1 + cotg^2 y = \dfrac{1}{sen^2 y} = cosec^2 y = x^2$, $cotg\ y = \sqrt{x^2 - 1}$

Llevando este resultado a la igualdad (1) y despejando y', $y' = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

Si $h(x) = arc\ cosec\ x \Rightarrow h'(x) = \dfrac{-1}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$

REGLA DE LA CADENA TRIGONOMETRICA INVERSAS

Si en cada una de las funciones anteriores se tuviese una función de *x, u(x)*, en lugar de la función *x*, las derivadas de las nuevas funciones compuestas se convierten, por la regla de la cadena en:

$f(x) = arc\ sen\ u$ $f'(x) = \dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$ $f(x) = arc\ cos\ u$ $f'(x) = \dfrac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

$f(x) = arc\ tg\ u$ $\quad f'(x) = \dfrac{u'}{1+u^2}$ $\quad f(x) = arc\ cotg\ u$ $\quad f'(x) = \dfrac{-u'}{1+u^2}$

$f(x) = arc\ sec\ u$ $\quad f'(x) = \dfrac{u'}{u\cdot\sqrt{u^2-1}}$ $\quad f(x) = arc\ cosec\ u$ $\quad f'(x) = \dfrac{-u'}{u\cdot\sqrt{u^2-1}}$

Ejercicio: cálculo de derivadas

① Calcular la derivada de $y = arc\ sen\ \dfrac{x+1}{x-1}$

Solución:

- Si $u = \dfrac{x+1}{x-1}$, por la derivada de un cociente,

$$u' = \frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} \qquad \text{Luego} \qquad y' = -\frac{2}{(x-1)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}}$$

② Hallar la derivada de $y = arctg\dfrac{ln\ x}{x}$

Solución:

- Llamando $u = \dfrac{ln\ x}{x}$, $u' = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - ln\ x\cdot 1}{x^2} = \dfrac{1-ln\ x}{x^2}$
- $y' = \dfrac{1-ln\ x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1+\left(\frac{ln\ x}{x}\right)^2} = \dfrac{1-ln\ x}{x^2}\cdot\dfrac{x^2}{x^2+(ln\ x)^2} = \dfrac{1-ln\ x}{x^2+(ln\ x)^2}$

③ Calcular la derivada de $y = arc\ sec\dfrac{5x^3}{3}$

Solución:

- $u = \dfrac{5}{3}x^3$, $u' = \dfrac{5}{3}\cdot 3x^2 = 5x^2$
- $y' = \dfrac{5x^2}{\frac{5}{3}x^3\sqrt{\left(\frac{5}{3}x^3\right)^2-1}}$

④ ¿Cuál es la derivada de $y = arc\ cosec\ \sqrt{x^2-1}$?

Solución:

- Si $u = \sqrt{x^2-1}$, $u' = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
- $y' = \dfrac{-u'}{u\cdot\sqrt{u^2-1}} = \dfrac{-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{x^2-1-1}} = \dfrac{-x}{(x^2-1)\sqrt{x^2-2}}$